

А.А.Шматько
Е.Н.Одаренко

Электроника сверхвысоких частот

основы теории и
лабораторный практикум

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. В.Н. КАРАЗИНА**

А.А. Шматько, Е.Н. Одаренко

**ЭЛЕКТРОНИКА
СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ**

Основы теории и
лабораторный практикум

Учебное пособие

Под редакцией А.А. Шматько

*Рекомендовано Министерством образования и науки Украины
как учебное пособие для студентов высших учебных заведений*

Харьков «Факт»
2003

ББК 22.336 я7
Ш71
УДК 621.385.6

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11-2469 від 18. 06 03)*

Рецензенти: Прохоров Е. Д., доктор фізико-математичних наук, професор,
Чурюмов Г. І., доктор фізико-математичних наук, професор.

*Рекомендовано до друку вченою радою
Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна*

В учебном пособии представлены основы теории и радиофизический практикум по технике и электронике СВЧ традиционных электровакуумных резонансных и нерезонансных приборов с длительным и кратковременным взаимодействием. В первой главе изложены основы теории электровакуумных приборов. В последующих главах приведена теория отдельных приборов и дано описание лабораторных работ. Рассмотрены такие приборы: клистрон, лампа бегущей волны, лампа обратной волны, генератор дифракционного излучения, магнетрон. Отдельно рассмотрена периодическая структура типа гребенки в волноводе, представлена ее теория и дано описание лабораторной работы по измерению ее дисперсии.

Учебное пособие предназначено для студентов физических и радиофизических специальностей высших учебных заведений, аспирантов и преподавателей.

Шматько О. О., Одаренко Є. М.

Ш71 Електроніка надвисоких частот. Основи теорії та лабораторний практикум: Навчальний посібник /За ред. Шматько О. О. - Х.: Факт, 2003. – 248 с.

ISBN 966-637-162-6

У навчальному посібнику представлено основи теорії та радіофізичний практикум по техніці та електроніці НВЧ традиційних електровакуумних резонансних та нерезонансних приладів з повздовжньою та короткочасовою взаємодією. В першій главі викладені основи теорії електровакуумних приладів. В послідовних главах приведена теорія окремих приладів і опис виконання лабораторної роботи. Розглянуті такі прилади: клістрон, лампа біжучої хвилі, лампа зворотної хвилі, генератор дифракційного випромінювання, магнетрон. Окремо розглянута періодична система типу гребінки в хвилеводі, представлена її теорія і опис лабораторної роботи по виміру дисперсії.

Навчальний посібник призначений для студентів фізичних та радіофізичних спеціальностей вищих навчальних закладів, аспірантів і викладачів.

ББК 22.336 я7

ISBN 966-637-162-6

© О. О. Шматько, Є. М. Одаренко, 2003

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.	7
Введение.	8
Глава 1. Основные уравнения электроники	14
1.1. Необходимые физические условия работы СВЧ приборов	15
1.2. Уравнения электронно-волнового взаимодействия. . .	18
1.3. Различные подходы и приближения.	19
1.4. Потенциальные и вихревые поля	30
1.5. Уравнение возбуждения.	37
1.6. Двухмерное приближение	42
1.6.1. Нелинейные уравнения движения	47
1.6.2. Магнитное фокусирующее поле	51
1.6.3. Поле пространственного заряда	53
Контрольные вопросы	55
Рекомендованная литература.	56
Глава 2. Отражательный клистрон	57
2.1. Конструкция прибора и принцип действия.	57
2.2. Теория	61
2.2.1. Движение электронов в высокочастотном поле резонатора (модуляция по скорости)	62
2.2.2. Движение электронов в поле отражателя.	64
2.2.3. Высокочастотный ток пучка	66
2.2.4. Мощность взаимодействия	70
2.2.5. Рабочие характеристики отражательного клистрона.	73
2.2.6. Пусковой ток клистрона.	79
2.2.7. Механическая перестройка частоты.	81
Лабораторная работа.	81
Контрольные вопросы	85
Рекомендованная литература.	86

Глава 3. Нагрузочные характеристики отражательного клистрона.	87
3.1. Теория	88
3.1.1. Комплексная проводимость колебательной системы.	88
3.1.2. Мощность отражательного клистрона	91
3.2. Диаграмма Вольперта – Смита	92
Лабораторная работа.	99
Контрольные вопросы	101
Рекомендованная литература	101
Глава 4. Периодические структуры	102
4.1. Основные характеристики периодических структур.	102
4.1.1. Теорема Флоке и пространственные гармоника поля.	103
4.1.2. Фаза волны, фазовая и групповая скорости, коэффициент замедления.	105
4.1.3. Формула Рэлея и классификация дисперсии.	108
4.1.4. Сопротивление связи.	113
4.2. Теория	115
4.2.1. Постановка и решение граничной задачи	115
4.2.2. Дисперсионное уравнение и его анализ.	119
Лабораторная работа.	123
Контрольные вопросы.	125
Рекомендованная литература.	126
Глава 5. Лампа бегущей волны (ЛБВ).	127
5.1. Конструкция ЛБВ и принцип действия	128
5.2. Слабосигнальное приближение.	132
5.3. Выходные характеристики ЛБВ	134
5.3.1. Коэффициент усиления	134
5.3.2. Электронный КПД	137
5.3.3. Амплитудные характеристики ЛБВ	139

5.3.4. Частотные характеристики ЛБВ	139
5.3.5. Магнитное поле.	140
5.3.6. Дисперсионные характеристики ЛБВ.	142
Лабораторная работа.	145
Контрольные вопросы	147
Рекомендованная литература.	148
Глава 6. Лампа обратной волны (ЛОВ).	149
6.1. Принцип действия ЛОВ.	149
6.2. Теория	157
6.3. Параметры и выходные характеристики ЛОВ.	162
6.3.1. Частота генерируемых колебаний.	162
6.3.2. Выходная мощность и электронный КПД.	165
Лабораторная работа.	170
Контрольные вопросы	173
Рекомендованная литература.	173
Глава 7. Генератор дифракционного излучения	174
7.1. Принцип действия ГДИ	175
7.2. Теория	180
7.2.1. Исходные предпосылки и допущения	180
7.2.2. Система уравнений электронно-волнового взаимодействия.	181
7.2.3. Крутизна колебательной характеристики	185
7.3. Эксплуатационные характеристики ГДИ.	187
7.3.1. Пусковой ток.	187
7.3.2. КПД и электронная перестройка частоты	189
7.4. Экспериментальные методы	193
7.5. Измерение амплитудного распределения поля в ОР.	194
7.6. Измерение добротности открытого резонатора.	196
7.7. Холодная модель ГДИ	200
Лабораторная работа.	202
Контрольные вопросы	204
Рекомендованная литература.	204

Глава 8. Магнетрон	205
8.1. Движение электрона в плоском диоде и скрещенных электрических и магнитных полях	207
8.2. Многорезонаторный магнетрон.	215
8.3. Принцип действия магнетрона. Группировка электронов.	216
8.3.1. Влияние продольной компоненты электрического поля.	218
8.3.2. Влияние поперечной компоненты электрического поля.	219
8.3.3. Образование спиц в электронном потоке.	220
8.4. Рабочий режим магнетрона	222
8.4.1. Потенциал синхронизации.	223
8.4.2. Пороговое значение потенциала.	225
8.5. Выходные характеристики магнетрона	229
Лабораторная работа.	233
Контрольные вопросы.	235
Рекомендованная литература	235
Заключение	237
Список использованной литературы.	245

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии основное внимание уделено описанию физических процессов в традиционных электровакуумных приборах электроники сверхвысоких частот (СВЧ), изучаемых в высших учебных заведениях по курсу «Техника и электроника СВЧ». Рассмотрены такие приборы: отражательный клистрон, лампа бегущей волны (ЛБВ), лампа обратной волны (ЛОВ), генератор дифракционного излучения (ГДИ-орotron), магнетрон. В отдельную главу выделены вопросы, касающиеся замедляющих систем (в частности гребенки), применяемых в приборах СВЧ.

В первой главе описываются физические принципы электроники СВЧ, положенные в основу построения теории электронно-волнового взаимодействия, рассматриваются различные методы анализа протекающих в приборах физических процессов. Получены основные уравнения, которые описывают закономерности энергообмена в приборах СВЧ.

В методическом плане изложение каждой главы пособия построено по примерно одинаковой схеме. Вначале дается относительно кратко теоретическое описание изучаемого электронного прибора, его принцип действия, уравнения, описывающие процесс электронно-волнового взаимодействия, выводятся основные эксплуатационные характеристики. Затем приводится описание лабораторной работы и дается задание для ее выполнения. Для самостоятельной подготовки студентов сформулированы контрольные вопросы и приведен список рекомендованной литературы по изучению рассматриваемого прибора.

Пособие ориентировано на широкий круг студентов старших курсов, аспирантов и специалистов, изучающих физические процессы электронно-волнового взаимодействия в приборах электроники СВЧ.

Авторы выражают благодарность Э. Д. Прохорову и Г. И. Чурюмову за полезные замечания при рецензировании работы.

ВВЕДЕНИЕ

Электроника сверхвысоких частот изучает взаимодействие электромагнитных волн с электронными потоками, движущимися под действием статических электрических и магнитных полей в различных электродинамических волноведущих и резонаторных системах. В результате такого взаимодействия может наблюдаться генерация, усиление, умножение и преобразование частоты электромагнитных колебаний, а также другие родственные процессы, сопровождающиеся преобразованием энергии движущегося ансамбля электронов (кинетической или потенциальной) в энергию высокочастотных колебаний. Длина волны таких колебаний может простираться от единиц метров до десятых долей миллиметров, фактически от метровых до субмиллиметровых волн. По существу к СВЧ-диапазону относятся частоты, которые находятся в диапазоне 0.3 – 3000 ГГц.

В 1975 г. Международный консультативный комитет по радио предложил новую систему разделения и наименования полос в спектре электромагнитных волн от 3 Гц до 3000 ГГц. Фактически СВЧ-диапазон разделился на ряд поддиапазонов: ультравысокие частоты (УВЧ): 300 – 3000 МГц; сверхвысокие частоты (СВЧ): 3 – 30 ГГц; крайне высокие частоты (КВЧ): 30 – 300 ГГц; гипервысокие частоты (ГВЧ): 300 – 3000 ГГц.

На рис. 1 представлена шкала электромагнитных колебаний по частоте, длине волны, буквенному обозначению диапазонов, которая дает представление о расположении друг относительно друга различных участков спектра колебаний.

Так, например, диапазон миллиметровых и субмиллиметровых волн, широко освоенный в настоящее время, располагается на этой шкале на стыке двух диапазонов: СВЧ-диапазона, активно разрабатываемого с конца 30-х годов средствами вакуумной и полупроводниковой электроники и оптического диапазона, освоение которого фактически началось с 60-х годов приборами квантовой электроники и оптики.

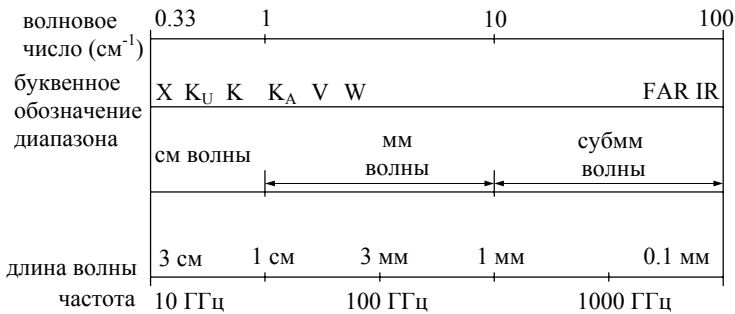


Рис. 1. Шкала электромагнитных колебаний.

В настоящее время электромагнитные колебания используются для многочисленных практических применений. Перечислим наиболее важные из них.

1. *Радиосвязь, радиолокация и радионавигация.* Информационная емкость канала (радиотелефонного – 1 канал с полосой частот порядка 10 кГц, телевизионного – 1 канал с полосой 5 МГц) повышается с увеличением частоты используемого частотного диапазона. Так, например, если бы весь СВЧ-диапазон использовался для передачи информации, то в нем бы можно было разместить в 100 тысяч раз больше каналов, чем в диапазонах длинных, средних и коротких радиоволн вместе взятых. С помощью устройств антенной техники СВЧ-колебания могут излучаться в соответствующем направлении в свободное пространство узкими пучками (волновыми пакетами), с помощью которых можно получать изображение различных движущихся и неподвижных объектов, причем четкость изображения повышается с укорочением длины волны. Это свойство электромагнитных волн используется в радиолокации и радионавигации. Электромагнитные волны могут проникать через ионосферу, что используется для космической связи с летательными аппаратами и изучения атмосферы Земли. Существуют окна непрозрачности и прозрачности для электромагнитных волн в различных частотных диапазонах. Такие окна прозрачности наблюда-

ются в диапазонах частот $f = 35$ ГГц, 95 ГГц, 140 ГГц, 240 ГГц. Особое применение СВЧ-диапазон нашел в военной технике для управления полетами ракет различного назначения, скрытой военной связи на небольшие расстояния ($f = 60$ ГГц), в системах радиопротиводействия, авиационной технике и спутниковой связи.

2. *Диагностика плазмы и электронных пучков.* Резонансное поглощение электромагнитного излучения плазмой на разных частотах позволяет определять закономерности различных процессов и явлений, происходящих в плазме, а также стимулировать протекание реакций в термоядерной плазме.

3. *В новых технологиях и бытовом применении.* Это, прежде всего, промышленные СВЧ-печи различного применения: сушка леса, бумаги, мануфактуры, производство в молибденовых СВЧ-печах стекловолоконных линий передачи, сублимационные сушилки, бытовые СВЧ-печи и др.

4. *Молекулярная спектроскопия.* Исследование колебательных и вращательных спектров молекул различных объектов, колебаний кристаллической решетки твердых тел, спектров примесей в полупроводниковых структурах и других веществах. Такое изучение вещества возможно за счет того, что квант энергии электромагнитного поля соответствующего диапазона частот соизмерим с квантом энергии перехода молекул из одного энергетического уровня на другой. Квантовые переходы определяются соответствующими частотами электромагнитного излучения или поглощения:

а) квантовые переходы электронов с одного энергетического уровня атома на другой сопровождаются излучением или поглощением кванта энергии видимого света;

б) изменение энергии колебаний атома в молекуле соответствует излучению или поглощению энергии в инфракрасном диапазоне частот;

в) вращение молекулы как единого целого соответствует колебательным процессам, которые сопровождаются поглоще-

нием или излучением в сантиметровом, миллиметровом или субмиллиметровом диапазоне.

5. *Медицина, биология и химия.* Резонансное воздействие электромагнитного излучения на биологические объекты открывает новые перспективы по изучению физики природы явлений. Анализ интенсивности и ширины линий свидетельствует о физико-химическом состоянии вещества, что является существенным для развития современной биологии и медицины. Многие резонансные процессы, протекающие в биологических объектах, имеют электромагнитную природу, что упрощает их исследование, физическое объяснение механизмов наблюдаемых явлений и создание новых веществ с заданными свойствами. Электромагнитное воздействие определенной частоты на химические реакции приводит к их ускорению. При взаимодействии с лекарственными препаратами улучшается их качество и эффективность, а также могут проявляться новые свойства и др.

Освоение различных частотных диапазонов спектра электромагнитных волн связано с разработкой новых, совершенно отличных от длинноволновой вакуумной электроники и низкочастотной радиотехники, способов и механизмов преобразования энергии электронов в энергию СВЧ-колебаний, что стимулировало развитие новых областей не только техники, но и науки в целом.

Впервые СВЧ-колебания на длине волны 66 см зарегистрировал в своих опытах по изучению существования и передачи электромагнитных волн на расстояние Генрих Рудольф Герц (1888 г.). В последствии П. Н. Лебедев в опытах по двойному лучепреломлению усовершенствовал искровой генератор Герца и получил колебания с длиной волны 0.6 см. В дальнейшем А. А. Глаголева-Аркадьева получила излучение на длинах волн от 0.1 мм до 50 мм, достигнув, таким образом, длин волн инфракрасного диапазона. Однако все эти колебания были некогерентными и малой интенсивности. И лишь в 1919 г. Баркгаузен и Куртц в вакуумном триоде (аудионе) обнаружили когерентные СВЧ-колебания, хотя сам триод был сконструирован на низкочастотный диапазон. Сетка в нем находилась под положитель-

ным по отношению к аноду и катоду потенциалом. После этого А. Халл (1921 г.) открыл существование докритического, критического и закритического режима работы цилиндрического диода, движение электронов в котором осуществлялось в скрещенных электрических и магнитных статических полях. Позже Жачеком (1924 г.) были обнаружены СВЧ-колебания в конструкции Халла на частоте, близкой к циклотронной частоте. В этом же году в Харькове А. А. Слуцкиным и Д. С. Штейнбергом под руководством профессора Д.А.Рожанского был открыт магнетронный способ генерации колебаний на разрезной конструкции многосегментного цилиндрического диода. Братья Варриан (1937 г.) открыли клистронный способ генерации электромагнитных колебаний (пролетный клистрон) В 1939 – 40 г. В. Ф. Коваленко и независимо Н. Д. Девятков с сотрудниками разработали отражательный клистрон. Все приборы, названные выше, фактически содержали резонаторную колебательную систему. Рудольф Компфнер (1942 г.) на основе спиральной замедляющей структуры сконструировал первый нерезонансный усилитель на бегущей электромагнитной волне – лампу бегущей волны (ЛБВ). Компфнеру принадлежит идея и конструкция генератора СВЧ на обратной волне – ЛОВ.

После Второй мировой войны началось бурное развитие СВЧ-техники и электровакуумных приборов. В это время появились такие приборы, как ладдертрон, оротрон, генератор дифракционного излучения, клистроны с распределенным взаимодействием, мазеры на циклотронном резонансе, гиротроны, амплитроны, пениотроны и др.

Механизмы преобразования энергии электронов в энергию высокочастотных колебаний в указанных приборах разные. Общим для всех электронных приборов СВЧ является свойство *инерции* электронов. На низких частотах электроны при взаимодействии с полем не проявляют своей инерционности и время их пролета через пространство взаимодействия существенно меньше периода электромагнитных колебаний. В СВЧ-диапазоне ситуация обратная – период колебаний значительно меньше времени пролета электронами пространства взаимо-

действия. Это приводит к тому, что электроны приобретают разные переменные скорости – происходит их скоростная модуляция. Последнее приводит к группировке электронов в сгустки, наличие которых приводит к появлению высокочастотного конвекционного тока. Фактически эти эффекты и определяют работу большинства электронных приборов СВЧ. Различают приборы с кратковременным и длительным взаимодействием О-типа и М-типа в зависимости от направления электрического и магнитного статических полей, приложенных к электронному потоку.

В последующих главах рассмотрены основные приборы СВЧ-диапазона, принцип их действия, механизмы передачи энергии электронов СВЧ-полю, элементы теории, экспериментальные методы анализа работы таких приборов, а также дано описание лабораторных работ на основе оборудования, используемого на кафедре физики СВЧ радиофизического факультета Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина.

Авторы выражают благодарность заведующему учебной лабораторией В. М. Бондаренко за помощь, оказанную при постановке лабораторных работ и полезные замечания при составлении заданий к ним.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОНИКИ

Электроника сверхвысоких частот изучает взаимодействие электромагнитных волн с электронными потоками, движущимися в различных электродинамических волноведущих и резонаторных системах.

В настоящее время представления о физических процессах, происходящих в классических резонансных и нерезонансных электровакуумных приборах СВЧ, достаточно ясны, а их теория в известной мере завершена. Такая теория позволяет достаточно эффективно моделировать процесс электронно-волнового взаимодействия, а также рассчитывать выходные и эксплуатационные характеристики приборов и оптимизировать их конструкцию для различных частотных диапазонов.

В виду сложности физики процессов в приборах электроники СВЧ, для их понимания и изучения требуется привлечение ряда разделов теоретической физики, механики, электродинамики, теории колебаний, статистической физики, методов вычислительной математики, радиотехники и др.

В электронике СВЧ приборы разделяют по принципу действия и конструкции на нерелятивистские и релятивистские, нерезонансные и резонансные, О-типа и М-типа, с кратковременным и длительным взаимодействием электронов с СВЧ-полем.

К нерелятивистским приборам относятся такие приборы, в которых скорость движения электронов в потоке существенно меньше скорости света, а их масса не зависит от скорости движения. В основном это относительно низковольтные СВЧ-приборы. В них ускоряющее электроны напряжение находится в пределах от нескольких киловольт до нескольких десятков киловольт. Релятивистские приборы по этим признакам диаметрально противоположны их нерелятивистским аналогам. Ускоряющие напряжения в этих приборах достигают сотен кило-

вольт. В таких условиях скорость электронов сравнима со скоростью света, что требует учета релятивистских эффектов.

В нерезонансных приборах добротность колебательной системы мала, а в резонансных составляет сотни и даже тысячи единиц.

В приборах О-типа векторы напряженности статических электрических и магнитных полей, формирующих траекторию движения электронов, являются коллинеарными. В приборах М-типа статические электрические и магнитные поля направлены, как правило, перпендикулярно друг к другу. Движение электронов в таких приборах происходит в скрещенных электрических и магнитных полях.

Кратковременный и длительный характер электронно-волнового взаимодействия определяется временем пребывания электронов в пространстве взаимодействия под действием высокочастотных электромагнитных полей.

1.1. Необходимые физические условия работы СВЧ-приборов

Основным физическим условием, характерным для приборов СВЧ-электроники, является условие *инерции электронов*. Это условие реализуется для случая, когда время пролета t_L электронами пространства взаимодействия длины L и частота колебаний СВЧ-поля в приборе ω связаны между собой следующим неравенством:

$$\omega t_L \gg 1.$$

При выполнении этого условия за время пролета электронов в пространстве взаимодействия t_L высокочастотное поле несколько раз меняет свою полярность. Таким образом, электроны, влетевшие в разные моменты времени в область взаимодействия прибора, подвергаются воздействию разного по величине

и направлению СВЧ-поля. Это приводит к тому, что электроны, влетевшие в пространство взаимодействия прибора в разные моменты времени, приобретают различные переменные скорости. В результате происходит модуляция электронов по скоростям и, как следствие, образование сгустков. Наличие электронных сгустков порождает высокочастотный конвекционный ток. Это новый способ управления электронным потоком. В низкочастотной электронике такого явления не наблюдается (электроны находятся в поле постоянной амплитуды) и время пролета от катода до анода связано с частотой обратным неравенством:

$$\omega t_L \ll 1.$$

Кроме отмеченного выше условия *инерционности* электронов, в электронике СВЧ для устойчивой работы приборов необходимо выполнение еще двух условий – *временного и пространственного синхронизма*.

В резонансных приборах с кратковременным (дискретным) взаимодействием должно выполняться условие *временного синхронизма* – частота следования электронных уплотнений (сгустков) через область взаимодействия (например, через резонатор клистронного генератора) должна быть близка к собственной частоте колебательной системы или кратна ей. В этом случае движущаяся последовательность электронных сгустков попадает синхронно в одну и ту же тормозящую фазу высокочастотного поля собственного колебания системы.

Другая ситуация реализуется в приборах с длительным взаимодействием. Этот класс приборов следует разделить на нерезонансные и резонансные устройства с высокочастотной колебательной системой. Общим условием для работы этих приборов является условие *пространственного синхронизма* (равенство волновых чисел волны и электрона при заданной частоте ω), которое заключается в том, что скорость распространения электромагнитной волны (обычно фазовая скорость

волны v_φ) и начальная скорость электронов v_0 близки друг к другу, т.е.

$$v_0 \approx v_\varphi.$$

В результате выполнения этого условия электроны длительное время могут отдавать свою энергию высокочастотному полю при их синхронном движении с замедленной волной в пространстве взаимодействия.

В резонансных приборах с длительным взаимодействием кроме условия *пространственного синхронизма* должно одновременно выполняться и условие *временного синхронизма*, которое фактически обеспечивает положительную обратную связь. В результате СВЧ-энергия накапливается в резонансной колебательной системе. Условия *пространственного* и *временного синхронизма* – это лишь формальные, хотя и необходимые условия, при которых может существовать преобразование энергии пучка электронов в энергию электромагнитных колебаний.

Важнейшим условием работы приборов СВЧ-электроники является условие *фазовой фокусировки*, или *группировки*, т.е. такого механизма, при котором обеспечивается преобладание в пространстве взаимодействия “полезных” электронов (отдающих свою энергию волне) над “вредными” (отбирающими СВЧ-энергию у волны). В сущности, принцип действия любого электровакуумного СВЧ-прибора заключается в его механизме *фазовой фокусировки*.

В электронике СВЧ особое место занимает *закон сохранения заряда*, позволяющий существенным образом упростить вычисление эксплуатационных характеристик приборов. Он формулируется следующим образом – величина заряда в любой момент времени и в любой точке пространства взаимодействия сохраняется. Фактически в процессе взаимодействия электронов с высокочастотным полем не представляется возможным определить в явном виде величину заряда электронного пучка, взаимодействующего с полем. Однако выполнение закона сохране-

ния заряда в любой точке пространства взаимодействия и в любой момент времени позволяет связать величину высокочастотного заряда с соответствующей известной постоянной его величиной на входе в систему, что существенно упрощает теоретический анализ процесса электронно-волнового взаимодействия.

1.2. Уравнения электронно-волнового взаимодействия

В электронных приборах СВЧ существуют две взаимно дополняющие субстанции. Это поток заряженных частиц, находящийся под действием электромагнитного поля, и колебательная или волновая система, формирующая поле, возбуждаемое пучком электронов. Поэтому при теоретическом описании электронно-волнового процесса взаимодействия основные уравнения любого прибора должны включать в себя уравнения, описывающие возбуждаемые электронным потоком поля в колебательной системе (это неоднородные уравнения Максвелла), и уравнения, описывающие состояние электронного потока при воздействии на него СВЧ-поля (уравнения движения и уравнения непрерывности). Самосогласованное решение этой системы уравнений и составляет основу для расчета выходных характеристик любого электровакуумного СВЧ-прибора.

На первом этапе решения такой задачи нам неизвестен ни закон движения электронов, ни вид высокочастотного тока пучка, возбуждающего резонансную систему прибора. Поэтому сначала эти две взаимодополняющие задачи решают отдельно. Задача электродинамики – определение высокочастотных полей по заданным источникам (высокочастотным токам и зарядам). Задачи электроники – установление законов движения электронов, определение в каждом сечении пространства взаимодействия высокочастотного тока и заряда электронного пучка, находящегося под действием СВЧ-полей.

1.3. Различные подходы и приближения

Рассмотрение процесса взаимодействия будем проводить классическими методами, поскольку кинетическая энергия электронов $\frac{mv_0^2}{2}$ значительно превосходит квант энергии поля $\hbar\omega$ в СВЧ-диапазоне:

$$\frac{mv_0^2}{2} \gg \hbar\omega,$$

где \hbar – постоянная Планка.

Теория будет строиться лишь для переменных составляющих электромагнитных полей, плотности заряда, скоростей электронов и высокочастотного тока пучка. Поля, создаваемые постоянной составляющей тока и заряда электронов, считаются скомпенсированными ионным фоном пучка, средняя плотность которого близка к средней плотности электронов.

Рассмотрение проблемы электронно-волнового взаимодействия в общем случае весьма сложная задача. Поэтому используют различные подходы и приближения к описанию этого процесса взаимодействия, среди которых можно выделить основные: *самосогласованное описание*, *кинетическое описание*, *метод заданного тока*, или *движения*, *метод заданного поля* и *слабосигнальное приближение*.

Самосогласованное описание. В общем случае теоретическое описание процесса взаимодействия электронов и поля должно основываться на уравнениях Максвелла и уравнении движения. В практической системе единиц, наиболее часто применяемой в электронике СВЧ, они имеют следующий вид:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.4)$$

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = e \left(\vec{E} + \mu_0 [\vec{v}, \vec{H}] \right). \quad (1.5)$$

Здесь \vec{E} (В/м), \vec{H} (А/м) – напряженности электрического и магнитного поля; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная проницаемости вакуума в практической системе единиц, $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг – заряд и масса электрона соответственно; \vec{v} – вектор скорости электронов.

При исследовании процесса взаимодействия уравнения (1.1–1.4) следует интегрировать при определенных граничных условиях: $\vec{E}_{tg} |_{\Sigma} = 0$, где Σ – поверхность колебательной системы (идеальный проводник). Кроме этого, уравнение движения (1.5) необходимо дополнить начальными условиями: $\vec{v} |_{t=t_0} = \vec{v}_0$, $\frac{d\vec{v}}{dt} |_{t=t_0} = \frac{d\vec{v}_0}{dt}$, $\vec{r} |_{t=t_0} = \vec{r}_0$ – начальные скорости и ускорения электронов по разным направлениям и их начальные радиус-векторы \vec{r}_0 на входе в электродинамическую систему прибора в момент времени $t = t_0$.

Система уравнений (1.1–1.5) в некоторой степени противоречива. Уравнения поля (1.1–1.4) записаны относительно непрерывных функций и непрерывных переменных \vec{r}, t , а уравнение движения (1.5) описывает закон движения дискретных точечных заряженных частиц.

Кинетическое описание. Другой подход, исключаящий это противоречие, основан на использовании кинетического уравнения для функции распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ электронов по координатам \vec{r} , скоростям \vec{v} и времени t , заменяющего фа-

ктически уравнение движения (1.5) в самосогласованной системе уравнений (1.1–1.5).

Введем такую функцию распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, что величина $f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{r}d\vec{v}$ имеет смысл числа электронов, координаты и скорости которых находятся в интервалах \vec{r} , $\vec{r} + d\vec{r}$ и \vec{v} , $\vec{v} + d\vec{v}$, соответственно. С помощью функции распределения электронов по скоростям $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ легко определяются выражения для плотности тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ и плотности заряда $\rho(\vec{r}, t)$ электронного потока, а именно:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = e \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (1.6)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = e \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}. \quad (1.7)$$

Физический смысл этих величин состоит в том, что плотность тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ и плотность заряда $\rho(\vec{r}, t)$ в данной точке пространства \vec{r} и в данный момент времени t создаются всеми электронами, имеющими, вообще говоря, разные скорости \vec{v} .

Для функции распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ можно получить дифференциальное уравнение (аналогично уравнению движения в системе (1.1–1.5)), которое имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} f + \frac{e}{m} \left(\vec{E} + \mu_0 [\vec{v}, \vec{H}] \right) \text{grad}_{\vec{v}} f = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right], \quad (1.8)$$

где обозначено:

$$\text{grad}_{\vec{r}} = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\text{grad}_{\vec{v}} = \vec{x}_0 \frac{\partial}{\partial v_x} + \vec{y}_0 \frac{\partial}{\partial v_y} + \vec{z}_0 \frac{\partial}{\partial v_z}$$

вычисляются в предположении, что дифференцирование проводится в первом случае $\text{grad}_{\vec{r}}$ по координатам \vec{r} , а во втором

$\text{grad}_{\vec{v}}$ – по скоростям \vec{v} ; величина $\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]$ определяет изменение

функции распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ электронов за счет соударений электронов с другими частицами: электронами, ионами, нейтральными молекулами.

Уравнение (1.8) называется кинетическим. Второе и третье слагаемые в левой части кинетического уравнения определяют изменение функции распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ за счет пространственной неоднородности распределения электронов по скоростям и электромагнитных полей \vec{E} и \vec{H} . Система уравнений электронно-волнового взаимодействия при кинетическом описании принимает вид:

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + e \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (1.9)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.10)$$

$$\text{div} \vec{H} = 0, \quad (1.11)$$

$$\text{div} \vec{E} = \frac{e}{\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}_{\vec{r}} f + \frac{e}{m} \left(\vec{E} + \mu_0 [\vec{v}, \vec{H}] \right) \text{grad}_{\vec{v}} f = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]. \quad (1.13)$$

Выписанная система уравнений является самосогласованной – ансамбль электронов возбуждает в колебательной системе прибора электромагнитное СВЧ-поле, которое, в свою очередь, воздействует на электронный поток, изменяя траектории частиц. Кроме этого, благодаря кинетическому уравнению, можно учитывать начальный тепловой разброс электронов по скоростям.

Слагаемое $\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]$ в (1.13), учитывающее соударение частиц, в

электронике СВЧ обычно не рассматривается, поскольку оно характеризует взаимодействие частиц на близких расстояниях, меньших, чем среднее расстояние между частицами. Если эта величина равна нулю, то уравнение (1.13) называется уравнением Власова. Дальние взаимодействия в кинетическом уравнении (1.13) учитываются с помощью силы Лоренца $e \left(\vec{E} + \mu_0 [\vec{v}, \vec{H}] \right)$.

Начальные приближения для функции распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ зависят от исходной модели электронного потока и прибора. Пучок на входе в систему может быть как моноэнергетическим (все электроны имеют одинаковые скорости), так и с произвольным распределением скоростей. В случае моноэнергетического пучка электронов функция распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ описывается дельта-функцией Дирака $\delta(\vec{v} - \vec{v}_r)$ и имеет вид:

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) \Big|_{t=t_0} = N(\vec{r}, t) \delta(\vec{v} - \vec{v}_r),$$

где величина $N(\vec{r}, t)$ определяет концентрацию заряженных частиц в пучке, а дельта-функция $\delta(\vec{v} - \vec{v}_r)$ в декартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\delta(\vec{v} - \vec{v}_{\vec{r}}) = \delta(\xi - v_x) \delta(\eta - v_y) \delta(\zeta - v_z).$$

Тогда плотность заряда $\rho(\vec{r}, t)$ и плотность тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ пучка (1.6), (1.7) упрощаются и сводятся к простым выражениям:

$$\rho(\vec{r}, t) = eN(\vec{r}, t),$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = eN(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t).$$

При отличном от моноэнергетического распределения, например, максвелловском распределении электронов по скоростям функция распределения $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ описывается выражением:

$$f(v) = N \left(\frac{m}{2\pi k T_e} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{mv^2}{k T_e} \right).$$

Здесь $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/град – постоянная Больцмана, T_e – температура по абсолютной шкале.

Выписанные системы уравнений в *самосогласованном* и *кинетическом* приближениях одинаково пригодны для описания как линейных, так и нелинейных процессов электронно-волнового взаимодействия в электронных приборах СВЧ на различных стадиях установления амплитуды колебаний.

Приближение заданного тока или заданного движения.

В приближении *заданного тока* или *движения* пространственное и временное распределение функций плотности тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ и плотности заряда $\rho(\vec{r}, t)$ считаются известными. Естественно, что их нельзя задавать произвольно потому, что они связаны между собой уравнением непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.14)$$

В этом случае решаются только уравнения Максвелла и не рассматриваются уравнения движения, а точнее, не учитывается обратное влияние поля на характер движения электронов пучка. Поэтому траектории электронов не изменяются в пространстве и времени под действием СВЧ-поля. Такое приближение используется при возбуждении заданными источниками (токами или зарядами) с известным и фиксированным пространственным и временным распределением резонаторов, волноводов, периодических систем, диэлектрических структур и др. Это приближение не используется для нахождения самосогласованного решения исходных систем. Полученная при таком подходе информация позволяет определять характеристики рассеянных на различных неоднородностях полей с учетом необходимых граничных условий на их поверхности. Кроме того, в таком приближении не рассматриваются нелинейные явления и процессы, поскольку они полностью определяются уравнениями движения электронов.

Приближение заданного поля. Это приближение используется в случае, когда в колебательной системе прибора существуют сильные высокочастотные поля (например при использовании высокочастотных резонаторов в резонансных электронных приборах) и можно пренебречь обратным влиянием пучка электронов на пространственную структуру поля. Считаются заданными распределения высокочастотных полей $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$ в колебательной системе прибора, а уравнения (1.5) или (1.8) интегрируются в этом заданном электромагнитном поле. Решение таких уравнений позволяет находить плотность высокочастотного тока пучка и, как следствие, величину электронной мощности P_e , которую пучок отдает СВЧ-полю системы

$$P_e = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_V \vec{j}(x, y, z, t) \vec{E}(x, y, z, t) dx dy dz d\omega t.$$

Здесь V – объем, в котором находятся электроны. Величина P_e имеет размерность мощности, которая численно равна усредненной за период колебаний работе поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ над высокочастотным током пучка за одну секунду. При условии $P_e > 0$ электрическое поле совершает положительную работу, увеличивая, в среднем, кинетическую энергию электронов. Наоборот, при выполнении условия $P_e < 0$ электроны, в среднем, отдают свою энергию СВЧ-полю за счет их торможения в этом поле. В такой ситуации происходит самовозбуждение колебаний (генераторы) или их усиление (усилители) при наличии входного сигнала. Приближение заданного поля в задаче возбуждения электронным потоком резонансных систем справедливо в случае, когда добротность колебательной системы Q велика, т.е. $Q \gg 1$. В таком рассмотрении приближение заданного поля является нулевым приближением задачи при разложении ее решения в ряд Тейлора по малому параметру Q^{-1} .

Слабосигнальное приближение. На начальной стадии взаимодействия электронов с электромагнитным полем амплитуда СВЧ-колебаний мала. Фактически, все процессы линейные, т.е. отсутствует обгон одних электронов другими, не наблюдаются нелинейные явления, нарастание амплитуды в пространстве и во времени происходит по экспоненциальным законам. Поэтому такое приближение еще называют приближением линейной теории. Условие слабого сигнала позволяет получить аналитическое решение исходной системы уравнений в линейном приближении. Электронный пучок представляет собой заряженную жидкость, которая характеризуется однозначным значением функции скорости и плотности заряда в каждом сечении системы вдоль направления движения частиц. По аналогии с гид-

родинамикой это приближение еще называют гидродинамическим. При описании электронного потока в гидродинамическом приближении чаще используют переменные Эйлера.

Существует и другой способ описания, в котором электроны подразделяются на отдельные группы («крупные частицы») с начальной фазой (временем t_{0j}) и начальной координатой \vec{r}_{0j} (индекс j характеризует номер конкретной укрупненной частицы) и затем анализируется движение этих укрупненных заряженных частиц в пространстве взаимодействия. Каждая укрупненная частица из полного ансамбля частиц при таком рассмотрении всегда различима даже в случае пересечения траекторий электронов или при обгоне друг друга. Переменные координат и скоростей частиц называются переменными Лагранжа. Этот подход (метод Лагранжа) используется в основном при нелинейном рассмотрении.

В приближении слабого сигнала скорость электронов, плотность заряда и плотность тока представим в виде двух слагаемых – регулярной постоянной и высокочастотной переменной: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \tilde{v}$, $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$, $\vec{j} = \vec{j}_0 + \tilde{j}$. Все переменные высокочастотные величины \tilde{v} , $\tilde{\rho}$, \tilde{j} предполагаются намного меньшими их постоянных величин \vec{v}_0 , ρ_0 , \vec{j}_0 .

Покажем на примере одномерной модели (все векторные величины направлены вдоль оси Oz), как получить дифференциального уравнения для высокочастотного тока пучка электронов $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{z}_0 j(z, t)$ (\vec{z}_0 – единичный орт в направлении оси Oz). Статическое фокусирующее магнитное поле направлено вдоль оси Oz , $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$; $H_0 = const \rightarrow \infty$. Тогда одномерное уравнение движения в переменных Эйлера принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + (v_0 + \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \frac{e}{m} E_z. \quad (1.15)$$

Полные производные по времени в переменных Эйлера обычно записываются в виде:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla).$$

В линейном приближении можно считать величину высокочастотной скорости малой $\tilde{v} \ll v_0$. Тогда из определения плотности высокочастотного конвекционного тока пучка $\vec{j} = \rho \vec{v}$ следует приближенное соотношение:

$$\vec{j} \approx \rho_0 \tilde{v} + v_0 \tilde{\rho}. \quad (1.16)$$

Здесь не учитываются малые квадратичные слагаемые.

Определим производную от высокочастотной скорости $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$ в уравнении (1.15). Для этого продифференцируем выражение (1.16) по времени. Тогда получаем следующее соотношение:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{v_0}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}. \quad (1.17)$$

Из уравнения непрерывности (1.14) в одномерном случае следует:

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial z} = - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Используя это соотношение и выражение (1.17), определим производную $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}$ через величину плотности тока пучка \vec{j} :

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{v_0}{\rho_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial z}. \quad (1.19)$$

Подставим это выражение в уравнение движения (1.15), тогда после тривиальных преобразований получим уравнение для переменной плотности высокочастотного конвекционного тока потока электронов \tilde{j} :

$$\frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z \partial t} + v_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z^2} = \frac{e\rho_0}{m} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (1.20)$$

Полученное уравнение для плотности высокочастотного тока одинаково пригодно как для гармонических, так и произвольных импульсных процессов. В случае гармонических процессов $\exp(-i\omega t)$ уравнение (1.20) упрощается:

$$\frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z^2} - 2i\beta_e \frac{\partial \tilde{j}}{\partial z} - \beta_e^2 \tilde{j} = -i\beta_e \frac{I_0}{2U_0} E_z. \quad (1.21)$$

Здесь I_0 – ток пучка, U_0 – ускоряющий потенциал, $\beta_e = \frac{\omega}{v_0}$ – электронное волновое число.

Отметим, что при кинетическом описании также можно воспользоваться слабосигнальным приближением. В этом приближении производная $\frac{\partial f}{\partial v}$ в кинетическом уравнении (1.13)

заменяется на $\frac{\partial f_0}{\partial v}$ в предположении, что $f_0(v)$ – невозмущенная функция распределения, $\tilde{f}(z, v, t)$ – относительно малое отклонение (возмущение) от невозмущенного значения $f_0(v)$.

В простейшем случае свободного движения электронов $E_z \equiv 0$ уравнение Власова принимает вид:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + v \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right) = 0$$

с начальными условиями для функции распределения $\tilde{f}(z, v, 0) = a_0 \exp(ikz)$ (a_0 – константа). Решение уравнения имеет вид:

$$\tilde{f}(z, v, t) = a_0 \exp(ikz) \exp(-ikvt).$$

Как видно, это решение описывает осцилляции функции распределения по скорости с круговой частотой kt , линейно возрастающей со временем, и периодом $\tau_0 = 2\pi / kt$. Возникновение все более высоких частот означает развитие более тонкой структуры. Следуя вышеизложенной методике можно в этом приближении получить и решение кинетического уравнения с учетом взаимодействия электронов с высокочастотным полем колебательной системы.

1.4. Потенциальные и вихревые поля

В электронных приборах СВЧ наряду со статическим полем пространственного заряда, участвующим в процессе взаимодействия с электромагнитными полями, существует и высокочастотное поле, которое еще называют динамическим полем пространственного заряда. В общем случае расчет таких полей затруднителен. Однако расчет может быть несколько упрощен, если поле пространственного заряда выделить отдельно от электромагнитных полей. Для этой цели представим общее электромагнитное поле, участвующее в процессе взаимодействия с электронами, в виде суммы двух полей – вихревого (индекс r) и потенциального (индекс p), а именно:

$$\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_p, \quad \vec{H} = \vec{H}_r + \vec{H}_p, \quad \vec{j} = \vec{j}_r + \vec{j}_p. \quad (1.22)$$

Из теории поля известно, что вихревые поля удовлетворяют условиям: $div\vec{E}_r = 0$, $div\vec{H}_r = 0$ и $div\vec{j}_r = 0$. Эти поля еще называют соленоидальными. Потенциальные (безвихревые) поля удовлетворяют другим условиям: $rot\vec{E}_p = 0$, $rot\vec{H}_p = 0$, $rot\vec{j}_p = 0$. Применяя эти условия к уравнениям Максвелла, получим две различные системы уравнений для вихревых и потенциальных полей:

$$\left. \begin{aligned} rot\vec{H}_r &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_r}{\partial t} + \vec{j}_r, \\ rot\vec{E}_r &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}_r}{\partial t}, \\ div\vec{H}_r &= 0, \\ div\vec{E}_r &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t} + \vec{j}_p &= 0, \\ div\vec{E}_p &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

На основании равенства $div\vec{j}_r = 0$ и уравнения непрерывности $div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ можно сделать вывод, что плотность тока \vec{j}_r не связана с переменной плотностью пространственного заряда ρ . Точно также ясно из уравнения $div\vec{E}_r = 0$, что вихревые поля \vec{E}_r не связаны с пространственным зарядом ρ .

Другой смысл имеют величины \vec{E}_p и \vec{j}_p , которые связаны с пространственным зарядом пучка электронов:

$$\operatorname{div}\vec{E}_p = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div}\vec{j}_p = -\frac{\partial\rho}{\partial t}. \quad (1.25)$$

Воспользуемся тем обстоятельством, что условие потенциальности поля $\operatorname{rot}\vec{E}_p = 0$ приводит к тому, что величина \vec{E}_p является градиентной функцией некоторой скалярной величины $\Phi(r, t)$ ($\operatorname{rotgrad}\Phi \equiv 0$), а именно:

$$\vec{E}_p = -\operatorname{grad}\Phi(r, t) \quad (1.26)$$

или:

$$\Delta\Phi(r, t) = -\frac{\rho(r, t)}{\varepsilon_0}. \quad (1.27)$$

Функция $\Phi(r, t)$ является высокочастотным потенциалом поля пространственного заряда пучка. Очевидно, что выражение (1.26) и уравнение (1.27) описывают высокочастотное кулоновское взаимодействие движущихся зарядов (электронов). Излучение этих зарядов и запаздывание описывается вихревыми компонентами полей, т.к. в поле \vec{E}_p запаздывание не входит.

Продемонстрируем применение этого подхода для нахождения уравнения для плотности высокочастотного тока пучка, разбив поле на вихревую и потенциальную компоненты. Для этой цели воспользуемся уравнением (1.20), в котором электрическое поле представим в виде суммы вихревой \vec{E}_r и потенциальной \vec{E}_p компонент: $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_p$. Тогда получим из (1.20) для величины \vec{j} уравнение:

$$\frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z \partial t} + v_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z^2} = \frac{e\rho_0}{m} \frac{\partial (\vec{E}_r + \vec{E}_p)}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Потенциальное поле \vec{E}_p , которое является полем пространственного заряда пучка электронов, удовлетворяет уравнению Пуассона (1.27) и уравнению Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{E}_p = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

а плотность высокочастотного тока пучка \vec{j}_p – уравнению непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{j}_p = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Продифференцируем первое из уравнений (1.25) по времени t , и получим следующее соотношение, используя второе уравнение из (1.25):

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \vec{E}_p = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \vec{j}_p$$

или

$$\vec{j}_p + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t} = 0,$$

что совпадает с (1.24). Используя эту связь потенциального поля пространственного заряда пучка с его плотностью тока, оконча-

тельно находим для величины \tilde{j} уравнение с учетом динамического поля пространственного заряда:

$$\frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial t^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z \partial t} + v_0^2 \frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z^2} + \frac{e}{m} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \tilde{j} = \frac{e\rho_0}{m} \frac{\partial E_r}{\partial t}. \quad (1.29)$$

В случае гармонических процессов $\exp(-i\omega t)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 \tilde{j}}{\partial z^2} - 2i\beta_e \frac{\partial \tilde{j}}{\partial z} - (\beta_e^2 - \beta_p^2) \tilde{j} = -i\beta_e \frac{I_0}{2U_0} E_r. \quad (1.30)$$

Здесь $\beta_p = \frac{\omega_p}{v_0}$ – плазменное волновое число, $\omega_p = \sqrt{\frac{e\rho_0}{m\varepsilon_0}}$ –

плазменная частота, I_0 – ток пучка.

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения второго порядка находится в виде суммы двух решений: $\tilde{j} = \tilde{j}_0 + \tilde{j}_1$. Одно из них, \tilde{j}_0 – общее решение однородного уравнения с начальными условиями на входе в систему для плотности тока пучка $\tilde{j}_0(z)_{z=0} = \tilde{j}(0)$ и высокочастотной скорости электронов $\tilde{v}(z)_{z=0} = \tilde{v}(0)$. Другое, \tilde{j}_1 – частное решение неоднородного уравнения (1.30) с нулевыми начальными условиями на входе в систему $z = 0$ для плотности тока пучка \tilde{j}_1 и его производной во времени $\frac{\partial \tilde{j}_1}{\partial t}$. Частное решение неоднородного уравнения (1.30) с нулевыми начальными условиями представим в виде $\tilde{j}_1 = \tilde{j}_1(z) = j_1(z) \exp(i\beta_e z)$. Тогда уравнение (1.30) для искомой величины $j_1 = j_1(z)$ упрощается:

$$\frac{d^2 j_1}{dz^2} + \beta_p^2 j_1 = \left(-\frac{i\beta_e I_0}{2U_0} \right) E_r \exp(-i\beta_e z). \quad (1.31)$$

Решение этого уравнения удобно находить через функцию Грина для такого вида уравнений:

$$G(z - z') = \frac{\sin \beta_p (z - z')}{\beta_p}.$$

В результате, используя найденную функцию Грина, получим из (1.30) для величины j_1 интегральное представление:

$$j_1 = -\frac{(i\beta_e I_0)}{2U_0} \int_0^z E_r(z') G(z - z') \exp(-i\beta_e z') dz'. \quad (1.32)$$

И окончательно для искомой величины переменной плотности тока пучка $\tilde{j}_1(z)$ получим:

$$\tilde{j}_1(z) = -\frac{(i\beta_e I_0)}{2U_0} \int_0^z E_r(z') G(z - z') \exp(i\beta_e (z - z')) dz'. \quad (1.33)$$

Решение однородного уравнения для плотности тока пучка \tilde{j}_0 будем искать в виде: $\tilde{j}_0 = j_0(z) \exp(i\beta_e z)$. Тогда это уравнение для величины j_0 с ненулевыми начальными условиями $\tilde{j}_0(z)_{z=0} = \tilde{j}(0)$ и $\tilde{v}(z)_{z=0} = \tilde{v}(0)$ упрощается и сводится к уравнению линейных колебаний:

$$\frac{d^2 j_0}{dz^2} + \beta_p^2 j_0 = 0,$$

решение которого имеет вид:

$$j_0(z) = j(0) \cos(\beta_p z) - iv(0) \beta_e \rho_0 \frac{\sin(\beta_p z)}{\beta_p}. \quad (1.34)$$

Таким образом, в линейном приближении получено аналитическое выражение для плотности тока в электронном пучке $\tilde{j}(z)$ с учетом влияния поля пространственного заряда. При отсутствии поля пространственного заряда $\beta_p = 0$ или малой его величине $\beta_p \rightarrow 0$ выражения решения однородного и неоднородного уравнений упрощаются и сводятся к виду:

$$\tilde{j}_0 = (\tilde{j}(0) - i\tilde{v}(0) \beta_e \rho_0 z) \exp(i\beta_e z), \quad (1.35)$$

$$\tilde{j}_1(z) = -\frac{(i\beta_e I_0)}{2U_0} \int_0^z E_r(z')(z-z') \exp(i\beta_e(z-z')) dz'. \quad (1.36)$$

Отметим одну важную особенность найденных аналитических выражений для плотности тока пучка $\tilde{j} = \tilde{j}_0 + \tilde{j}_1$. Эти выражения фактически пригодны для всех резонансных и нерезонансных электронных приборов О-типа при произвольной начальной модуляции скорости и плотности тока пучка (регулярной или случайной) на входе в пространство взаимодействия на линейной стадии процесса взаимодействия.

Получим далее уравнение для нахождения электромагнитных полей, возбуждаемых в колебательной системе прибора, которое в электронике СВЧ называют уравнением возбуждения.

1.5. Уравнение возбуждения

Для получения уравнения возбуждения воспользуемся исходными уравнениями Максвелла (1.23). Подействуем оператором rot на второе уравнение Максвелла системы уравнений (1.23), тогда:

$$rot rot \vec{E}_r = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} rot \vec{H}_r. \quad (1.37)$$

Используя уравнения Максвелла и известное векторное равенство

$$rot rot \vec{E} = \nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E},$$

преобразуем уравнение (1.37) к виду:

$$\Delta \vec{E}_r - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_r}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}_r}{\partial t}. \quad (1.38)$$

Уравнение (1.38) называется неоднородным волновым уравнением или уравнением возбуждения.

Для удобства вихревые поля в дальнейшем будем обозначать без индекса r . Так как для вихревых полей выполняется условие $div \vec{j} = 0$, то из уравнения непрерывности

$$div \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

следует, что $\rho \equiv 0$, подчеркивая тем самым, что плотность вихревого тока \vec{j} не связана с переменной плотностью заряда.

Аналогично условие $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ указывает на то, что вихревое поле \vec{E} не связано с пространственным зарядом пучка.

В электронике СВЧ используют приближенные методы решения волнового уравнения. В теории резонансных приборов с дискретным или длительным взаимодействием пространственная структура поля, с которым взаимодействует пучок электронов, считается заданной и фиксированной в пространстве. Амплитуда и фаза поля могут лишь изменяться во времени. Для нерезонансных приборов зачастую процесс во времени гармонический, а в пространстве взаимодействия описывается бегущей волной с медленно изменяющейся амплитудой поля. В каждом конкретном случае вид поля выбирается с учетом заданной электродинамической системы прибора. Рассмотрим в отдельности оба эти случая.

Резонансные приборы. Будем предполагать, что пространственная структура поля в резонансной системе электронного прибора фиксирована и близка к пространственной структуре поля одного из ее собственных видов колебаний. Такая ситуация наблюдается в высокочастотных колебательных системах. При этом частота генерации близка к собственной частоте колебаний резонансной системы. Амплитуда огибающей этого узкополосного процесса является медленно меняющейся функцией времени t на интервалах времени пролета электронов через пространство взаимодействия t_L . Период колебаний поля T , время пролета электронов через пространство взаимодействия t_L и время установления колебаний t_S связаны между собой неравенством: $T \ll t_L \ll t_S$. Таким образом, возбуждаемые в колебательной системе прибора электронным пучком электромагнитные поля можно представить в виде:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m e(t) \vec{E}_m(\vec{r}), \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_m h_m(t) \vec{H}_m(\vec{r}). \quad (1.39)$$

Поля $\vec{E}_m(\vec{r})$ и $\vec{H}_m(\vec{r})$ удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла:

$$\text{rot}\vec{H}_m = -ik_m\vec{E}_m, \quad \text{rot}\vec{E}_m = ik_m\vec{H}_m. \quad (1.40)$$

Здесь m – индекс колебаний, $k_m = \frac{\omega_m}{c}$ – волновое число m -го собственного вида колебаний, ω_m – собственная частота m -го вида колебаний (которая, вообще говоря, величина комплексная). Используя уравнения Максвелла (1.1) и (1.2), получим систему двух связанных дифференциальных уравнений относительно неизвестных амплитуд поля $e_m(t)$ и $h_m(t)$:

$$ick_m e_m(t) = -\frac{dh_m(t)}{dt}, \quad (1.41)$$

$$-ick_m h_m(t) = \frac{de_m(t)}{dt} + \frac{1}{N_m} \int_V \vec{j}\vec{E}_m^* dV + 4\pi\sigma e_m(t). \quad (1.42)$$

Величина N_m определяет норму m -го вида колебаний, которая вычисляется по формуле:

$$N_m = \frac{1}{4\pi} \int_V |\vec{E}_m|^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V |\vec{H}_m|^2 dV,$$

где интегрирование производится по объему резонансной системы V ; величина σ определяет проводимость поверхности резонансной системы и связана с ее добротностью Q_m выражением $Q_m = \frac{\omega_m}{4\pi\sigma}$. Исключая одну из неизвестных амплитуд по-

ля в (1.41–1.42), (например, $h_m(t)$) получим следующее эволюционное уравнение второго порядка для определения зависимости амплитуды поля $e_m(t)$ от времени t :

$$\frac{d^2 e_m(t)}{dt^2} + \frac{\omega_m}{Q_m} \frac{de_m(t)}{dt} + \omega_m^2 e_m(t) = -\frac{1}{N_m} \frac{d}{dt} \int_V \vec{j} \vec{E}_m^* dV. \quad (1.43)$$

Учитывая тот факт, что процесс возбуждения вынужденных колебаний в резонансной системе прибора на интервалах времени пролета электронов через пространство взаимодействия медленно меняющийся (за счет высокой добротности системы Q_m), амплитуду поля $e_m(t)$ представим в следующем виде: $e_m(t) = C_m(t) \exp(-i\omega t)$. Здесь $C_m(t)$ – медленно меняющаяся во времени комплексная амплитуда поля, а ω – частота возбуждаемых высокочастотных колебаний, которая, в принципе, отличается от частоты собственных колебаний системы ω_m за счет присутствия в системе электронного потока. В результате получим следующее приближенное уравнение первого порядка для медленно меняющейся амплитуды поля $C_m(t)$:

$$\frac{dC_m(t)}{dt} - i(\omega - \omega_m)C_m(t) = -\frac{1}{4N_m} \int_V \vec{j}(\omega) \vec{E}_m^* dV. \quad (1.44)$$

Здесь:

$$\vec{j}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \vec{j}(t) \exp(i\omega t) d(\omega t)$$

– амплитуда первой временной гармоники плотности тока пучка электронов. Эта величина зависит от амплитуды поля $C_m(t)$,

поскольку сама амплитуда плотности тока пучка $\vec{j}(t)$ связана со скоростью электронов, а скорость, в свою очередь, зависит от воздействующего на пучок СВЧ-поля. Полученное уравнение является довольно общим, так как структура поля \vec{E}_m считается хотя и фиксированной, но с произвольным амплитудным пространственным распределением. Это позволяет использовать полученное уравнение для разных классов резонансных электронных приборов, в которых структура поля в системе разная.

Нерезонансные приборы. В данном классе приборов с длительным взаимодействием в качестве колебательной системы используется протяженный участок волновода с периодической структурой вдоль оси Oz . Уравнения возбуждения для таких приборов относительно просто выводятся из уравнений Вайнштейна, полученных для случая возбуждения волноводов заданными токами:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m \left[C_m \vec{E}_m(\vec{r}, t) + C_{-m} \vec{E}_{-m}(\vec{r}, t) \right] + \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \vec{j}(\vec{r}, t), \quad (1.45)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \sum_m \left[C_m \vec{H}_m(\vec{r}, t) + C_{-m} \vec{H}_{-m}(\vec{r}, t) \right]. \quad (1.46)$$

Коэффициенты разложения полей в (1.45), (1.46) C_m и C_{-m} находятся по формулам:

$$C_m = \frac{1}{N_m} \int_0^z \int_S \vec{j} \vec{E}_{-m} dS dz, \quad (1.47)$$

$$C_{-m} = -\frac{1}{N_{-m}} \int_z^L \int_S \vec{j} \vec{E}_m dS dz,$$

где \vec{j} – плотность тока пучка электронов, а N_m – норма m -ой волноводной моды, которая определяется по формуле:

$$N_m = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left[\vec{E}_m, \vec{H}_{-m} \right] - \left[\vec{E}_{-m}, \vec{H}_m \right] \right\} dS .$$

Форма уравнений (1.47) может быть другой, если их продифференцировать по переменной z , а именно:

$$\frac{dC_m}{dz} = \frac{1}{N_m} \int_S \vec{j} \vec{E}_{-m} dS \quad (1.47a)$$

$$\frac{dC_{-m}}{dz} = -\frac{1}{N_{-m}} \int_S \vec{j} \vec{E}_m dS .$$

Продемонстрируем, как преобразуются уравнения возбуждения и уравнения движения для резонансных и нерезонансных приборов в случае двухмерных электромагнитных полей (двухмерное приближение). Такая модель правильно отражает физические явления и происходящие процессы в большинстве резонансных и нерезонансных электронных приборов СВЧ и поэтому может служить основой для расчета их выходных характеристик и выяснения механизмов преобразования энергии электронов в СВЧ-энергию поля.

1.6. Двухмерное приближение

Будем считать, что высокочастотное поле в электродинамической системе $\vec{E}_m(\vec{r}, t)$ имеет две компоненты $E_y(y, z)$ и $E_z(y, z)$. Представим его в виде:

$$\vec{E}_m(\vec{r}, t) = C_m(t) [\vec{y}_0 E_y(y, z) + \vec{z}_0 E_z(y, z)] \exp(-i\omega t). \quad (1.48)$$

Здесь \vec{z}_0 и \vec{y}_0 – единичные орты вдоль координатных осей Oz и Oy соответственно, $E_y(y, z)$ и $E_z(y, z)$ – пространственное распределение двух компонент электрического высокочастотного поля, которые возбуждаются электронным потоком в электродинамической системе прибора. Преобразуем в этом приближении величину заряда $\rho dS dz$ в выражениях (1.44) и (1.47) следующим образом:

$$\vec{j} dV = \vec{v} \rho dS dz = \rho_0 dS_0 \vec{v} \frac{v_{z0}}{v_z} \frac{dt_0}{dt} dz. \quad (1.49)$$

Здесь использованы известные соотношения для скорости электронов v_z на траектории в любой момент времени t и начальной скорости электронов v_{z0} в момент их влета в пространство взаимодействия t_0 : $dz = v_z dt$, $dz_0 = v_{z0} dt_0$, и закон сохранения заряда для электронного потока: $\rho dS dz = \rho_0 dS_0 dz_0 = \rho_0 dS_0 \frac{v_{z0}}{v_z} \frac{dt_0}{dt}$. Учитывая очевидные равенства $dS_0 = \frac{S_0}{\Delta} dy_0$ и $I_0 = j_0 S_0$ (здесь S_0 – площадь поперечного сечения пучка, Δ – толщина пучка, I_0 – ток пучка на входе в систему, j_0 – плотность тока на входе в систему), окончательно получим:

$$\vec{j} dV = \frac{I_0}{\Delta} \frac{\vec{v}}{v_z} \frac{dt_0}{dt} dy_0 dz. \quad (1.50)$$

Используя это выражение, преобразуем уравнения возбуждения для резонансных приборов (1.44) к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{dC_m(t)}{dt} - i(\omega - \omega_m)C_m(t) = \\ & = \frac{|I_0|}{4\pi\Delta N_m} \int_0^{2\pi} \int_{\Delta_0}^L \left[E_z^* + \frac{dy}{dz} E_y^* \right] \exp(i\omega t) dz dy_0 d\omega t_0 \quad (1.51) \end{aligned}$$

и для нерезонансных приборов (1.47а):

$$\frac{dC_m}{dz} = \frac{|I_0|}{\pi\Delta N_m} \int_0^{2\pi} \int_{\Delta} \left[E_z^* + \frac{dy}{dz} E_y^* \right] \exp(i\omega t) dy_0 d\omega t_0. \quad (1.52)$$

В уравнениях (1.51) и (1.52) возможны дальнейшие преобразования при переходе к безразмерным величинам и параметрам.

Введем новые переменные: $\tau = \frac{\omega'_m}{2Q_m} t$ – безразмерное время;

$\xi = \frac{y}{H}$, $\zeta = \frac{z}{L}$ – безразмерные координаты электрона в пространстве взаимодействия; H – масштабный коэффициент по поперечной координате, L – длина прибора. Кроме этого, нормируем амплитуду поля C_m m -го вида на напряженность электростатического поля E_0 : $F_m = \frac{C_m}{E_0}$, где $E_0 = \frac{U_0}{L}$.

Особое место в приборах электроники СВЧ занимает интегральный параметр – сопротивление связи, который характеризует эффективность взаимодействия электронов и поля. В нерезонансных приборах О-типа чаще используют параметр Пирса или сопротивление связи. В резонансных приборах – параметр эффективности взаимодействия G . По определению сопротивление связи пучка с волной R определяется формулой:

$$R = \frac{|E_n|^2}{2\beta_n^2 P_n} = \frac{|E_n|^2}{2\beta_n^2 W v_\Gamma},$$

где P_n – мощность, переносимая n -ой пространственной гармоникой поля в направлении оси Oz ; E_n – амплитуда медленной пространственной гармоники поля, с которой взаимодействует пучок электронов, W – энергия, запасаемая на единице длины замедляющей системы, v_T – групповая скорость волны. Применительно к резонансным приборам с длительным взаимодействием чаще используют параметр эффективности взаимодействия G , который определяется выражением

$$G = 2|I_0|L^2Q_m(\omega'_m N_m U_0)^{-1}.$$

Следует отметить, что в норму колебаний N_m m -го типа колебаний (для приборов с периодическими структурами) входят все пространственные гармоники, характерные для периодических систем, как замедленные, так и быстрые.

С учетом этих обозначений уравнения возбуждения для резонансных приборов принимают следующий вид:

$$\frac{dF_m(\tau)}{d\tau} - i\frac{(\omega - \omega_m)}{\omega'_m}2Q_m F_m(\tau) = GS(F_m)F_m, \quad (1.51a)$$

где функция $S(F_m)$ определяется выражением

$$S(F_m) = \frac{H}{2\pi F_m \Delta} \int_0^1 \int_{\Delta}^{2\pi} \left[E_z^* + \frac{d\xi}{d\zeta} E_y^* \right] \exp(i\omega t) d\omega t_0 d\xi_0 d\zeta$$

и называется средней крутизной колебательной характеристики резонансного СВЧ-прибора, которая, в общем случае, является комплексной величиной: $S(F_m) = S_1(F_m) + iS_2(F_m)$. Вещественная ее часть $S_1(F_m)$ определяет пусковой ток $I_{\text{пуск}}$ прибора

$G_{\text{нук}} (\sim I_{\text{нук}}) = [S_1(0)]^{-1}$, электронный КПД η_e и мощность P колебаний:

$$\eta_e = F^2 S_1(F_m), \quad P = I_0 U_0 F^2 S_1(F_m);$$

а мнимая часть крутизны $S_2(F_m)$ – частотные характеристики прибора (частоту ω и электронное смещение частоты $\delta\omega$):

$$\delta\omega = \frac{(\omega - \omega'_m)}{\omega'_m} 2Q_m = -GS_2(F_m) = -\frac{S_2(F_m)}{S_1(F_m)}.$$

Для нерезонансных приборов уравнение возбуждения сводится к следующему:

$$\frac{dF_m(\zeta)}{d\zeta} = \frac{\hat{G}}{\pi \hat{\Delta}} \int_0^{2\pi} \int_{\Delta} \left[E_z^* + \frac{d\xi}{d\zeta} \frac{H}{L} E_y^* \right] \exp(i\omega t) d\xi_0 d\omega t_0. \quad (1.52a)$$

Здесь:

$$\hat{G} = \frac{|I_0| L^2}{N_m U_0}, \quad \hat{\Delta} = \frac{\Delta}{H}.$$

В приборах с длительным взаимодействием компоненты электрического высокочастотного поля в нерелятивистском случае связаны между собой соотношением $E_y = iE_z$. При наличии периодических структур в приборах О-типа эти компоненты поля можно представить в виде:

$$E_y = if(z)\psi_y(y)\exp(i\beta_n z); \quad (1.53)$$

$$E_z = f(z)\psi_z(y)\exp(i\beta_n z).$$

Здесь $\beta_n = \frac{\omega_m}{v_{\varphi n}}$ – продольное волновое число n -ой пространственной гармоники поля, $v_{\varphi n}$ – ее фазовая скорость. В случае резонансных приборов распределение поля $f(z)$ по продольной координате z и распределения компонент полей $\psi_y(y)$, $\psi_z(y)$ по поперечной координате y – заданные функции. Для нерезонансных приборов функция $f(z)$ является константой, а зависимость поля от координаты z в процессе взаимодействия с электронами определяется функцией $F_m(\zeta)$, которая находится из уравнений (1.52а).

Таким образом, для резонансных и нерезонансных приборов уравнения возбуждения имеют совершенно разный вид.

В приборах О-типа с длительным взаимодействием время пролета электронов через пространство взаимодействия, с одной стороны, намного превосходит период колебаний, а с другой – намного меньше времени установления колебаний в резонансных приборах. Это позволяет фактически использовать одно и то же уравнение движения электронов для разного класса приборов. Получим его в приближении двухмерных высокочастотных полей.

1.6.1. Нелинейные уравнения движения

Воспользуемся векторным уравнением движения (1.5). Для удобства перепишем его здесь:

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = e\left(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]\right).$$

Распишем векторное произведение в уравнении $[\vec{v}, \vec{B}]$ в проекциях на оси координат:

$$[\vec{v}, \vec{B}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{x}_0 (B_z v_y - B_y v_z) - \vec{y}_0 (B_z v_x - B_x v_z) + \vec{z}_0 (B_y v_x - B_x v_y).$$

Перепишем векторное уравнение движения в виде трех скалярных и преобразуем их, используя переменные Лагранжа для укрупненных частиц:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{|e|\hbar}{m} (E_x + B_z v_y - B_y v_z), \quad (1.54)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{|e|\hbar}{m} (E_y + B_x v_z - B_z v_x), \quad (1.55)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{|e|\hbar}{m} (E_z + B_y v_x - B_x v_y). \quad (1.56)$$

Введем фазу $\theta = \theta(t, t_0, y, y_0, z, z_0) = \omega t - \beta_e z - \varphi_0$, где $\beta_e = \frac{\omega}{v_0}$

– электронное волновое число, т.е. перейдем в движущуюся с начальной скоростью электронов v_0 систему координат. Здесь t_0 – начальное время влета в пространство взаимодействия, а z_0, y_0 – начальное местоположение укрупненной частицы в методе «крупных частиц» при использовании переменных Ла-

гранжа. Преобразуем уравнения движения для электронов на траектории относительно продольной координаты z . Для этой цели продифференцируем фазу θ по продольной координате z :

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = \omega \frac{\partial t}{\partial z} - \beta_e.$$

Отсюда находим продольную скорость через производную $\frac{\partial z}{\partial t}$:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = v_0 \left(1 + \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^{-1}.$$

Вычислим ускорение или вторую производную в уравнении движения (1.56) от продольной координаты z по времени t :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^{-3}.$$

Воспользуемся вычисленными значениями первой $\frac{\partial t}{\partial z}$ и второй

$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$ производных:

$$\frac{\partial t}{\partial z} = \frac{1}{v_0} \left(1 + \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right),$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{1}{v_0} \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2},$$

тогда получим уравнение, связывающее величину $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$ и ускорение электронов через вторую производную $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, из уравнения движения (1.56):

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = - \left(1 + \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^3 \frac{\beta_e}{v_0^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (1.57)$$

Аналогично можно найти и выражение для второй производной от поперечной координаты электрона по продольной координате электрона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} &= \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right]. \end{aligned}$$

Используя полученные выше выражение для продольной скорости $\frac{\partial z}{\partial t}$, находим вторую производную

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \left(1 + \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \frac{1}{v_0^2} \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right]. \quad (1.58)$$

Таким образом, уравнения движения (1.55) и (1.56) сводятся к двум дифференциальным уравнениям второго порядка (1.57), (1.58) относительно введенных переменных $\theta = \theta(y, z, t, t_0)$ и $y = y(z, z_0, t, t_0)$, а именно:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \left(1 + \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^3 \frac{\beta_e |e|}{v_0^2 m} (E_z + B_y v_x - B_x v_y), \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = & \left(1 + \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \frac{1}{v_0^2} \frac{|e|}{m} \times \\ & \times \left[- (E_y + B_x v_z - B_z v_x) + \frac{\partial y}{\partial z} (E_z + B_y v_x - B_x v_y) \right]. \quad (1.60) \end{aligned}$$

Неизвестная поперечная скорость v_x каждой укрупненной частицы (электрона), входящая в уравнения (1.59), (1.60), находится из уравнения (1.54) и в данном случае полностью определяется индукцией магнитного поля \vec{B} .

1.6.2. Магнитное фокусирующее поле

Статическое магнитное поле в электронных приборах в основном используется для фокусировки электронных потоков. Под термином «фокусировка», прежде всего, понимается не сведение всех электронов в точку, а поддержание на всем интервале движения электронов в пространстве взаимодействия заданных поперечных размеров пучка. В приборах СВЧ для этой цели может использоваться как магнитная, так и электростатическая фокусировка. При магнитной фокусировке используются как электромагниты, так и периодические последовательности постоянных магнитов. Электростатическая фокусировка применяется значительно реже. При таком виде фокусировки в системе создается знакопеременное постоянное во времени электрическое поле.

В двухмерном поле в приближении некоторые поперечные компоненты высокочастотных и статических полей отсут-

ствуют: $E_x = 0$, $B_x = 0$, $B_y = 0$. Фокусирующее магнитное поле имеет лишь одну продольную компоненту $\vec{B} = \vec{z}_0 B_z$. Это приближение позволяет найти из уравнения движения (1.54) в явном виде поперечную скорость электронов v_x , входящую в (1.59) и (1.60), как функцию поперечной координаты y :

$$v_x = -\frac{|e|\hbar}{m} B_z (y - y_0). \quad (1.61)$$

Таким образом, в двухмерном приближении фактически учитывается трехмерное движение электронов в пространстве взаимодействия. Такая ситуация характерна для теоретических моделей приборов О-типа, где фокусирующее магнитное поле считается конечной величиной.

Из уравнений (1.59–1.60) следует, что наличие у вектора индукции магнитного поля хотя бы одной поперечной компоненты приводит к появлению в правых частях продольного и поперечного уравнения движения дополнительных слагаемых. Следовательно, в этом случае будет происходить изменение не только формы траекторий электронов, но и условий группирования пучка.

В этой связи следует отметить, что в реальных конструкциях электронных приборов практически невозможно обеспечить пространственную однородность фокусирующего поля, что влечет за собой появление его поперечных компонент. Поэтому при расчетах эксплуатационных характеристик приборов необходимо учитывать воздействие пространственно неоднородных фокусирующих полей на условия электронно-волнового взаимодействия.

1.6.3. Поле пространственного заряда

По физической сущности процесс электронно-волнового взаимодействия в СВЧ-приборе коллективный, т.е. каждый в отдельности взятый электрон взаимодействует самосогласованно не только с высокочастотным полем колебательной системы, но и с кулоновским полем, порождаемым всем ансамблем взаимодействующих между собой электронов. Существуют такие ситуации или режимы работы прибора, при которых можно пренебречь кулоновскими полями пространственного заряда. Тогда нарушается коллективный характер взаимодействия и процесс можно считать одночастичным. В приборах СВЧ-поле пространственного заряда (статическая и динамическая его части) может ухудшать или улучшать группировку электронов, тем самым увеличивая или уменьшая эффективность передачи энергии электронов полю. Обычно для нахождения поля пространственного заряда используют два метода: метод функции Грина и метод рядов Фурье по временным гармоникам основной частоты, которые являются эквивалентными при одинаковых исходных предпосылках.

В двухмерной модели взаимодействия при учете полей пространственного заряда для слаботочных электронных потоков можно ограничиться лишь поперечной компонентой статического поля E_{py} , определяемой из уравнений (1.26), (1.27):

$$E_{py} = -\omega_p^2 \frac{m}{|e|} (y - h),$$

где h – поперечная координата центра пучка. Динамическая часть поля пространственного заряда по сравнению со статической частью зачастую предполагается малой. Влияние магнито-статического фокусирующего поля и поля пространственного заряда на характер движения электронов легко учесть в уравнениях движения. Как оказывается, их воздействие на пучок при формировании высокочастотного тока противоположное (знаки

при этих величинах разные). Такая ситуация уже отмечалась ранее при рассмотрении слабосигнального приближения. Преобразуем уравнения движения с учетом этих двух факторов.

Введем безразмерные переменные: $\Phi_0 = \frac{\omega L}{v_0}$ – невозмущенный угол пролета электроном пространства взаимодействия длиной L ; $\omega_c = \frac{|e|B_z}{m}$ – циклотронная частота; $\beta_c = \frac{\omega_c}{v_0}$ – циклотронное волновое число. Используя эти переменные и учитывая соотношение $\xi_0 - \frac{h}{H} \ll 1$, получим из (1.59–1.61) следующие безразмерные уравнения движения:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = \left(1 + \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)^3 \left(\frac{\Phi_0}{2} \frac{E_\zeta}{E_0} \right), \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2} = \left(1 + \frac{1}{\Phi_0} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{1}{2} \times \\ \times \left\{ \left[-\frac{\Phi_0}{2} \frac{E_\xi}{E_0} + \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \frac{E_\zeta}{E_0} \right] + L^2 (\beta_p^2 - \beta_c^2) (\xi - \xi_0) \right\}. \quad (1.63)$$

Уравнения (1.51а), (1.62), (1.63) описывают самосогласованный процесс электронно-волнового взаимодействия в резонансных приборах при соответствующих начальных условиях для неизвестных величин. Для генераторов это нулевые начальные условия, для усилителей они отличны от нулевых значений. Аналогично для нерезонансных приборов необходимо решать систему уравнений (1.52а), (1.62), (1.63).

В последующих главах эти уравнения будут использованы для построения теории различных электровакуумных приборов СВЧ-электроники, нахождения их эксплуатационных характеристик, изучения физических процессов электронно-волнового взаимодействия.

Контрольные вопросы

1. Объяснить условия синхронизма для резонансных и нерезонансных приборов СВЧ и их различие.
2. Сформулировать закон сохранения заряда и пояснить, как он используется при выводе уравнений электроники.
3. Какие существуют подходы при описании электронно-волнового взаимодействия?
4. В чем суть самосогласованного и кинетического описания процесса взаимодействия?
5. Пояснить смысл выделения вихревых и потенциальных полей.
6. Как получить уравнение для плотности тока пучка электронов с учетом поля пространственного заряда пучка в линейном приближении?
7. Найти решение для плотности тока пучка в интегральном представлении с учетом и без учета начальных условий.
8. Как получить уравнение возбуждения для резонансных приборов?
9. Как использовать уравнения Вайнштейна для вывода уравнений возбуждения для нерезонансных приборов?
10. Как использовать переменные Эйлера и переменные Лагранжа при выводе уравнений движения, и какие в их применении различия?
11. Как учитывается влияние продольного статического магнитного поля?
12. Как учитывается постоянная составляющая поля пространственного заряда пучка?
13. Какие параметры описывают эффективность взаимодействия?

14. Что такое крутизна колебательной характеристики и как через нее выражаются выходные характеристики прибора?
15. Получить уравнения возбуждения для резонансных и нерезонансных приборов.

Рекомендованная литература

1. *Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. – М.: Сов. радио, 1973. – 399 с.
2. *Лопухин В. М.* Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1953. – 324 с.
3. *Роу Дж.* Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот. – М.: Сов. радио, 1969. – 616 с.
4. *Трубецков Д. И.* Введение в СВЧ-электронику. История и начальные сведения. – В кн.3: 7-я зимняя школа-семинар инженеров: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1986. – 119 с.
5. Физические основы миллиметровой и субмиллиметровой техники. Т. 2. Источники. Элементная база. Радиосистемы / Шестопалов В. П. – К.: Наук. думка, 1985. – 256 с.
6. *Цейтлин М. Б., Фурсаев М. А., Бецкий О. В.* Сверхвысокочастотные усилители со скрещенными полями. – М.: Сов. радио, 1978. – 280 с.
7. *Шевчик В. Н., Трубецков Д. И.* Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. – М.: Сов. радио, 1970. – 584 с.
8. *Шестопалов В. П.* Дифракционная электроника. – Х.: Вища шк., 1976. – 231 с.
9. *Шестопалов В. П., Вертий А. А., Ермак Г. И. и др.* Генераторы дифракционного излучения. – К.: Наук. думка, 1991. – 320 с.