ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
к самостоятельной работе студентов
по курсу «Физика СВЧ»

1. Элементы теории поля

1.1. Подсчитать поток вектора $\vec{A} = 5/r^2\vec{l}_r$ сквозь сферическую поверхность радиуса $r = a$. Центр сферы совпадает с точкой $r = 0$.

Решение.

Потоком вектора $\vec{A}$ сквозь замкнутую поверхность S называют скалярную величину $\Phi = \oint\limits_S \vec{A}\,d\vec{S} = \oint\limits_S A_n\,dS$, где A_n - проекция вектора на направление положительной нормали к площадке dS.

Так как в задаче поверхность S сферическая и направление вектора $\vec{A}$ совпадает с направлением радиуса-вектора, то $A_n = A_r = 5/a^2$ для всех точек поверхности интегрирования.

Поток может быть записан в виде

$$\Phi = \oint\limits_S \frac{5}{a^2}dS = \frac{5}{a^2}4\pi a^2 = 20\pi .$$

1.2. Исследовать поле вектора $\vec{N}$, который в прямоугольной декартовой системе координат задан выражением $\vec{N} = 2\left(\sin\frac{x}{\pi}\right)\vec{i}$.

Решение.

Для определения характера поля необходимо вычислить дивергенцию и ротор вектора $\vec{N}$. По условию задачи вектор имеет одну проекцию N_x и эта проекция зависит только от координаты x. Следовательно $rot\,\vec{N} = 0$, а дивергенция будет равна $div\,\vec{N} = \frac{\partial N_x}{\partial x} = \frac{2}{\pi}\cos\frac{x}{\pi}$.

Так как дивергенция вектора $\vec{N}$ отлична от нуля, поле не имеет векторного потенциала.

Так как $rot\,\vec{N} = 0$, то поле имеет скалярный потенциал, который определяется из выражения $\vec{N} = grad\,\varphi$.

Выражения для компонент вектора $\vec{N}$ могут быть представлены в виде:

$$N_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\sin\varphi\frac{x}{\pi}; \qquad N_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0; \qquad N_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

То скалярный потенциал зависит только от координаты x и равен

$$\varphi = \int N_x dx = -2\pi\cos\frac{x}{\pi} + const .$$

Для определения постоянной интегрирования необходимо задаться точкой нулевого потенциала. Пусть $\varphi = 0$ при $x = 0$. Тогда $const = 2\pi$ и $\varphi = 2\pi\left(1 - \cos\dfrac{x}{\pi}\right)$.

1.3. В декартовой системе координат векторное поле $\vec{A}$ имеет единственную составляющую $A_z = 5x^2$. Выяснить характер поля. Изобразить качественно картину силовых линий поля.

Решение.

Вычисляем дивергенцию вектора $\vec{A}$: $div\,\vec{A} = \partial A_z / \partial z = 0$. Следовательно, исследуемое поле является соленоидальным. Вместе с тем $rot\vec{A} = -10x\vec{l}_y$, поэтому поле не является потенциальным. Качественная картина силовых линий поля изображена на рис. 1.1.

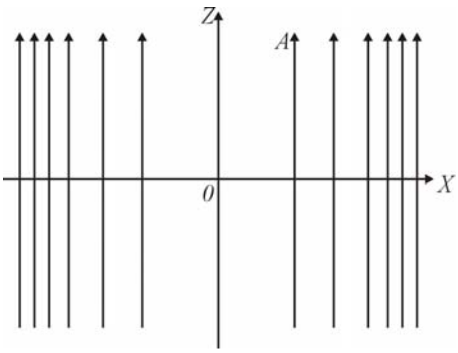

Рис. 1.1

2. Уравнения Максвелла

2.1. Плоская гармоническая линейно поляризованная электромагнитная волна распространяется в неограниченном пространстве. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = \varepsilon_0$, магнитная проницаемость $\mu = \mu_0$, удельная проводимость $\gamma = 0$. Амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 50\,мВ/м$. Угловая частота $\omega = 10^8\,сек^{-1}$. Составить уравнение волны и определить ее параметры. Определить величину и направление векторов напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и Умова-Пойнтинга $\vec{\Pi}$.

Решение.

Расположим координатные оси так, как показано на рис. 2.1. Ось Z направим параллельно вектору $\vec{E}$. Будем считать. Что волна распространяется в направлении оси Y. По условию вектор $\vec{E}$ линейно поляризован. Поэтому в пространстве он будет сохранять неизменное направление. Проекции вектора $\vec{E}$ будут равны:

$E_x = 0;\ E_y = 0;$

$E_z = E_{zm}\sin\left(\omega t + \psi\right) = \mathrm{Im}\left\{\dot{E}_{zm}e^{i\omega t}\right\}.$

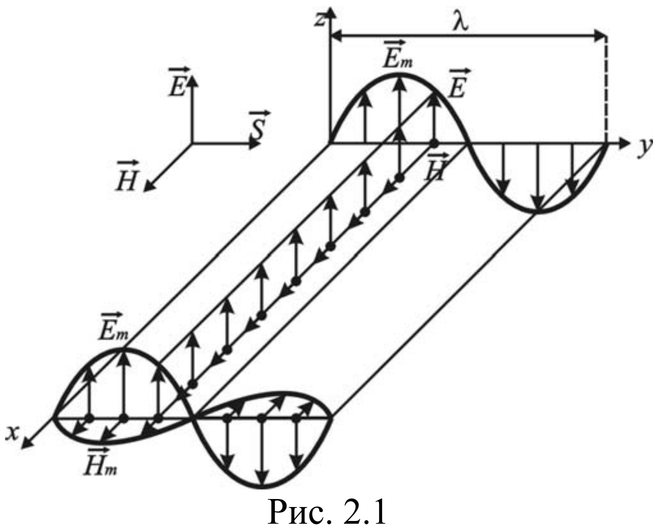

Рис. 2.1

Для плоской волны в плоскости, нормальной к направлению распространения, вектор $\vec{E}$ должен иметь одну и ту же величину.

Следовательно, E_{zm} и ψ будут функциями только одной координаты y.

Рассмотрим второе уравнение Максвелла в комплексной форме (1.2.б). Развернув выражение ротора, получим:

$$\frac{d\dot{E}_{zm}}{dy} = -i\omega\mu\dot{H};\ 0 = -i\omega\mu\dot{H}_{ym};\ 0 = -i\omega\mu\dot{H}_{zm}.$$

Следовательно $\dot{H}_{ym} = \dot{H}_{zm} = 0$, а $\dot{H}_{xm} = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{d\dot{E}_{zm}}{dy}$.

Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ имеет только одну проекцию H_x, нормальную и к вектору напряженности электрического поля $\vec{E}$ и к направлению распространения волны y.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла (1.2.а). Раскрыв выражение ротора и, учитывая, что векторы поля имеют по одной проекции, получим

$$-\frac{d\dot{H}_{xm}}{dy} = i\omega\varepsilon\dot{E}_{zm}.$$

Подставив в последнее равенство выражение для напряженности магнитного поля, получим уравнение

$$\frac{d^2\dot{E}_{zm}}{dy^2} = -\omega^2\mu\varepsilon\,\dot{E}_{zm}.$$

Введя обозначение $\alpha^2 = \omega^2\varepsilon\mu$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2\dot{E}_{zm}}{dy^2} + \alpha^2\dot{E}_{zm} = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\dot{E}_{zm} = \dot{C}_1 e^{i\alpha y} + \dot{C}_2 e^{-i\alpha y},$$

где $\dot{C}_1$ и $\dot{C}_2$ - постоянные интегрирования (комплексные числа). Так как волна распространяется в неограниченном пространстве, то отражения не будет, поэтому $\dot{C}_1 = 0$. Следовательно, $\dot{E}_{zm} = \dot{C}_2 e^{-i\alpha y}$. По условию амплитуда напряженности электрического поля $E_m = 5*10^{-2}\ В/м$. Отсюда $C_2 = 5*10^{-2}$. Аргумент постоянной $\dot{C}_2$ можно задать произвольно, его значение было принято равным нулю. Коэффициент фазы

$$\alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = 10^8\sqrt{\frac{1}{4\pi*9*10^9}*4\pi*10^{-7}} = \frac{1}{3}м^{-1},$$

следовательно, $\dot{E}_{zm} = 5*10^{-2}e^{-i\frac{y}{3}}\ В/м$.

Мгновенное значение вектора напряженности электрического поля

$$\vec{E} = E_z\vec{k} = \mathrm{Im}\left\{\dot{E}_{zm}e^{i\omega t}\right\}\vec{k} = 5*10^{-2}\sin\left(10^8 t - \frac{y}{3}\right)\vec{k}\ \ В/м.$$

Комплексная амплитуда вектора магнитного поля может быть представлена в виде

$$\dot{H}_{xm} = -\frac{1}{i\omega\mu}\frac{d\dot{E}_{zm}}{dy} = \frac{\alpha}{\omega\mu}\dot{E}_{zm}e^{-i\alpha y} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\dot{E}_{zm}e^{-i\alpha y}.$$

Поэтому $\dot{H}_{xm} = \frac{5}{120\pi}10^{-2}e^{-i\frac{y}{3}} = 1.33*10^{-4}e^{-i\frac{y}{3}}\ \ A/м$.

Мгновенное значение вектора напряженности магнитного поля

$$\vec{H} = H_x\vec{i} = 1.33*10^{-4}\sin\left(10^8 t - \frac{y}{3}\right)\vec{i}\ \ A/м.$$

Мгновенное значение вектора Умова-Пойнтинга равно

$$\Pi = \left[\vec{E},\vec{H}\right] = E_m H_m \sin^2\left(\omega t - \alpha y\right)\vec{j} = 6.65*10^{-8}\sin^2\left(10^8 t - \frac{y}{3}\right)\vec{j} =$$

$$= \left\{3.33*10^{-6} - 3.33*10^{-6}\cos 2\left(10^{8t} - \frac{y}{3}\right)\right\}\vec{j}.$$

Среднее значение вектора Умова-Пойнтинга будет равно

$$\dot{\Pi}_{ср} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}},\dot{\vec{H}}^*\right] = 3.33*10^{-6}\vec{j}\ \ Вт/м^2.$$

Оно определяет количество энергии, которое проходит в одну секунду через 1 $м^2$ площади, расположенной нормально к направлению распространения волны.

2.2. В вакууме существует электромагнитное поле, гармонически изменяющееся во времени. В некоторой точке пространства вектор $\vec{E} = 65\sin\left(2\pi*10^{12}t\right)\vec{i}$. Определить плотность тока смещения в данной точке.

Решение.

По определению ток смещения

$$\vec{J}_{см} = \varepsilon_0\frac{\delta\vec{E}}{\delta t} = 27.8\cos\left(2\pi*10^{12}t\right)\vec{i}.$$

Очевидно, что ток смещения и напряженность электрического поля в пространстве параллельны, однако ток опережает по фазе напряженность поля на $\frac{\pi}{2}$.

2.3. Показать, что при разрядке плоского конденсатора на его обкладках ток проводимости замыкается током смещения.

Решение.

По определению плотность тока проводимости $j_{пров}$ может быть определена как $j_{пров} = \frac{I}{S}$, где $I = \frac{dq}{dt}$ - ток проводимости, S - поверхность обкладки. Вместе с тем, $j_{пров} = \frac{\delta\sigma}{\delta t}$, где σ - поверхностная плотность свободных зарядов. Для плоского конденсатора величина индукции электрического поля определяется как $D = 4\pi\sigma$.

Таким образом,

$$j_{см} = \frac{\delta D}{\delta t} = \frac{\delta \sigma}{\delta t} = \frac{I}{S} = j_{пров}$$

3. Теория скин-эффекта

3.1. Бесконечное полупространство $x > 0$ заполнено хорошо проводящей средой с известными параметрами σ и $\mu_a = \mu_0 \mu$. На границе раздела с воздухом при $x = 0$ задано значение комплексной амплитуды вектора $\vec{H}$, имеющего единственную составляющую, направленную вдоль оси y: $\vec{H} = H_0 \vec{l}_y$. Найти распределение плотности тока проводимости в полупространстве, заполненного хорошо проводящей средой.

Решение.

Искомый вектор плотности тока проводимости можно найти из первого уравнения Максвелла: $rot\,\vec{H} = \vec{j}_{пр}$, в котором отсутствует слагаемое, соответствующее току смещения. Используя выражение для глубины скин-слоя $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_a \sigma}}$, можно записать

$$\vec{j}_{пр} = \frac{\delta H_y}{\delta x} \vec{l}_z = -\frac{1}{\delta}(1+i) H_0 \exp\left(-\frac{1}{\delta}\left[1+i\right)\right] x\right) \vec{l}_z .$$

Таким образом, ток в объеме проводящей среды ориентирован в направлении, перпендикулярном силовым линиям магнитного поля. Комплексная амплитуда напряженности электрического поля может быть записана в виде

$$\vec{E} = \vec{j}_{пр} / \sigma = -\sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} \left[1+i\right] H_0 \exp\left[-\frac{1}{\delta}(1+i)x\right] \vec{l}_z .$$

Ток в объеме проводящей среды можно заменить эквивалентным поверхностным током, плотность которого находят интегрированием объемной плотности по всему проводящему полупространству

$$\vec{\eta}_s = \int_0^\infty \vec{j}_{пр} dx = \left[-\frac{1}{\delta}\left(1+i\right) H_0 \vec{l}_z \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{\delta}(1+i)x\right] dx \right] = -H_0 \vec{l}_z \text{, А/м.}$$

Вектор $\vec{E}$ на поверхности металла может быть определен в виде

$$\vec{E}(0) = -\sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} (1+i) H_0 \vec{l}_z .$$

Таким образом, плотность поверхностного тока и напряженность электрического поля на границе раздела колинеарны (но не синфазны).

3.2. Определить соотношение между значениями омического и активного сопротивлениями проводника цилиндрической формы радиуса ρ, выполненного из серебра ($\sigma = 6 \cdot 10^7$ См/м) на частоте $f = 3 \cdot 10^8$ Гц.

Решение.

Омическое сопротивление цилиндрического проводника (для постоянного тока) может быть найдено как $R_0 = 1/\left\{\pi\sigma\rho^2\right\}$.

Активное сопротивление может быть найдено в виде

$$R_f = \frac{1}{2\pi\rho}\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}.$$

Отсюда может быть получено соотношение

$$\frac{R_f}{R_0} = \frac{\rho}{2}\sqrt{\pi f \mu\sigma}.$$

Для заданных величин получим

$$\frac{R_f}{R_0} \approx 250.$$

Дополнительный вывод: скин-эффект сильнее проявляется в проводах большего сечения. Для уменьшения сопротивления проводника переменному току его целесообразно заменить совокупностью тонких изолированных друг от друга проводников.

4. Направляемые волны

4.1. Плоская электромагнитная волна с параллельной поляризацией, имеющая частоту $f = 5\,ГГц$, падает из вакуума под углом $\varphi = 40^0$ на границу раздела с идеальным проводником, образуя в верхнем полупространстве волну E-типа. Найти продольное волновое число γ, поперечное волновое число $\gamma_\perp$, фазовую скорость E-волны $v_ф$, а также длины волн $\Lambda_{прод}$ и $\Lambda_{попер}$.

Решение.

Первоначально определим коэффициент фазы в свободном пространстве:

$\beta_0 = \omega / c = 6{,}283 * 5 * 10^9 /(3 * 10^8) = 104{,}72\,м^{-1}$.

Используя выражения $\gamma = \beta_0 \sin\varphi$ и $\gamma_\perp = \beta_0 \cos\varphi$, найдем

$\gamma = \beta_0 \sin 40^0 \approx 67{,}31\,м^{-1}$; $\gamma_\perp = \beta_0 \cos 40^0 \approx 80{,}22\,м^{-1}$. С учетом выражения $v_ф = \dfrac{\omega}{\gamma} = \dfrac{\omega}{\beta_0 \sin\varphi} = \dfrac{c}{\sin\varphi}$ фазовая скорость E-волны определим

$v_ф = c/\sin 40^0 = 4{,}667*10^8\ м/с$. Длины волн определим с помощью выражений:
$\Lambda_{прод} = 2\pi/\gamma = 0{,}093\,м = 9{,}3\ см$; $\Lambda_{попер} = 2\pi/\gamma_{\perp} = 0{,}078\,м = 7{,}8\,см$.

4.2. Какие типы волн могут распространяться в электродинамической структуре, представляющей собой плоский волновод с идеально проводящими металлическими плоскостями, расстояние между которыми $a = 10$ мм, на частоте $f = 17$ ГГц. Заполнение структуры – воздушное.

Решение.

На первом этапе определяем величину λ_0: $\lambda_0 = c/f = 1{,}764$ см.

Далее определяем величину критических длин волн: $\lambda_{kp} = \dfrac{2a}{m}\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$:

m	1	2	3	4	5
λ_{kp}, см	2	1	0,66	0,5	0,4

Анализ данных, приведенных в таблице, свидетельствует о том, что в таком волноводе могут распространяться типы волн: T и все E_m- и H_m-типы, у которых значение индекса $m \geq 2$. Волны с индексом $m = 1$ распространяться не будут, поскольку $\lambda_{kp\,E_1,H_1} > \lambda_0$.